

Golfaantrekkers in anisotrope media

Intrigerende waarnemingen op aarde, planeetmanen en sterren suggereren dat er in vloeistofmantels gelokaliseerde dynamische structuren bestaan. In de koude, donkere diepzee zijn op dieptes van 500 - 1400 m bijvoorbeeld koralen en sponzen geworteld. Deze zijn afhankelijk van een continue aanvoer van voedsel vanaf een bron die zich, in de vorm van plankton, ver weg aan het zeeoppervlak bevindt [1]. Evenzo wijzen aan het oppervlak van enkele ijsmanen waargenomen 'tjigerpatronen' op het bestaan van een eroderend mechanisme in de onderliggende oceanen [2]. Beide verschijnselen doen denken aan golfaantrekkers die optreden wanneer de vloeistof gelaagd is en het vloeistofdomein de symmetrie van reflecterende onderwatergolven breekt. Leo Maas en Jeroen Hazewinkel

408

Onderwatergolven

Zwaartekracht en rotatie bepalen samen de vorm van het oppervlak van een vloeistofmantel (ocean/atmosfeer) op aarde, planeet of ster. Verstoring van dit equipotentiaalvlak, bijvoorbeeld door getijdenwerking, leidt tot oppervlaktegolven. Deze hebben hun maximale uitwijking aan het oppervlak, vallen daaronder exponentieel af en planten zich langs dat oppervlak voort.

Zwaartekracht en rotatie verlenen

deze vloeistofmantels echter ook een stabiele interne gelaagdheid, namelijk in dichtheid en in impulsmoment. In zee veroorzaken temperatuur- en zoutgehalteverschillen een graduele dichtheidstoename met de diepte. In rust is de dichtheidsgradiënt parallel aan de zwaartekracht. Rotatie voegt daar een cilindrische gelaagdheid in impulsmoment aan toe. Impulsmoment neemt toe met toenemende afstand tot de draaias. In doorgemengde watermantels is dit de enige vorm van gelaagdheid.

Verstoringen van deze gelaagde media manifesteren zich als golven in het interne van de vloeistofmantel, in zee onderwatergolven genoemd. De koppeling van onderwatergolven met oppervlaktegolven is doorgaans zwak, waardoor onderwatergolven bestudeerd kunnen worden alsof het oppervlak 'bevroren' is. Hoewel een sferische gelaagdheid in dichtheid en een cilindrische gelaagdheid in impulsmoment doorgaans tegelijkertijd

voorkomen, is het conceptueel eenvoudiger deze eerst apart te bekijken; voor de dichtheidsgelaagde vloeistof bijvoorbeeld in een niet-roterend, klein bassin waarin de zwaartekracht één vaste richting kent.

Anisotrope media

Gelaagde media zijn anisotroop: deeltjesverplaatsing vanuit rust in radiële of cilindrische richting is energetisch 'kostbaar', daar loodrecht op is verplaatsing 'gratis'. Onderwatergolven wijken dan ook sterk af van golven in

Leo Maas (1956) is in 1987 in Utrecht gepromoveerd op gelijkschakeling van getijden. Hij werkt als oceanograaf bij het NIOZ (Koninklijk Nederlands Instituut voor Onderzoek der Zee) te Texel en is sinds 2007 als bijzonder hoogleraar verbonden aan het IMAU (Instituut voor Marien en Atmosferisch onderzoek Utrecht) van de Universiteit Utrecht.



Leo.Maas@nioz.nl

Jeroen Hazewinkel (1980) is gepromoveerd in 2010 op interne-golfpatronen in gestratificeerde vloeistoffen. Momenteel werkt hij als geofysicus voor Shell waar hij met elektromagnetische golven de diepere lagen van de aarde in kaart brengt.



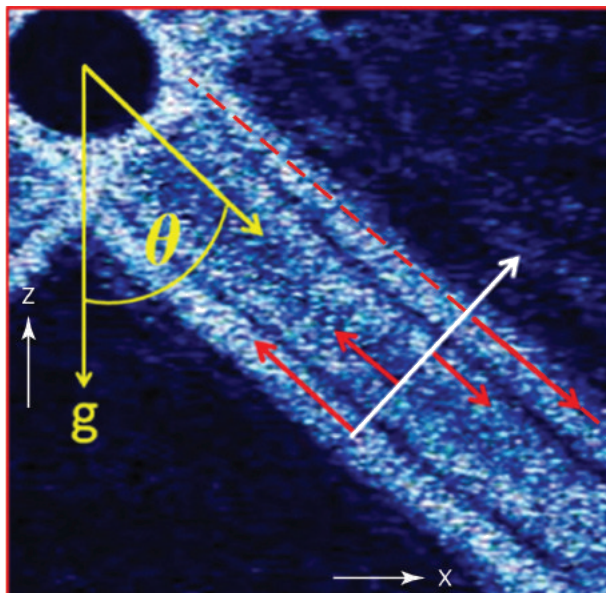
Jeroen.Hazewinkel@shell.com

isotrope media, zoals die aan het wateroppervlak of zoals licht en geluid, die geen voorkeursrichting kennen. In anisotrope media bewegen golven *scheef* door de vloeistof, onder een vaste hoek θ met de richting van de zwaartekracht of met de draaias. Deze golfhoek θ wordt bepaald door de verhouding van golffrequentie en een frequentie die de mate van gelaagdheid van dichtheid of impulsmoment van de rusttoestand weergeeft. Lineaire verstoringen (vlakke, monochromatische golven) worden bepaald door een dispersierelatie waarin de frequentie niet, zoals gebruikelijk, koppelt aan de golflengte, maar aan diens richting. Het gevolg is dat het gedrag van onderwatergolven in bijna alle denkbare opzichten verschilt van dat van oppervlaktgolven.

Geometrische focussering

Onderwatergolven zijn scheringsgolven (figuur 1). Waterdeeltjes in een onderwatergolfbundel oscilleren (rode pijltjes) in de richting waarin de energie loopt (gele pijl). Langs een golfstraal (rode streepjeslijn) gebeurt dit *in fase* (afschuivingsgolf). Maar de fase verschilt met die van parallel daaraan gelegen golfstralen (zie de verschillende fases waarin de rode pijltjes zich bevinden). Dat wil zeggen dat golfkammen en troggen, lijnen van gelijke fase, zich *loodrecht* op de (energie)bundel voortplanten.

Als een golf aan een hellende wand reflecteert zal de frequentie van die golf niet veranderen, en dus ook diens hoek θ met de anisotropierichting niet. Bij reflectie volgen deze golven dus niet de wet van Snellius, tenzij de reflecterende wand (of zijn normaal) loodrecht op de gelaagdheid staat (figuur 2c). Een scheve helling – zoals



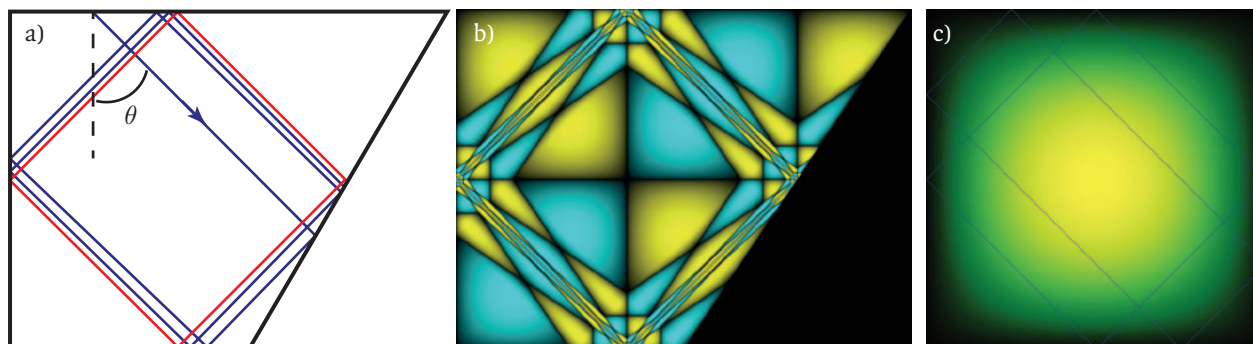
Figuur 1 Verticale oscillatie van een (zwarte) cilinder in een uniform gelaagde vloeistof genereert een onderwatergolf onder een hoek θ met de zwaartekracht, g . De fasepropagatie (witte pijl) staat loodrecht op de energiepropagatie (geel) en op de deeltjesoscillatie (rood).

een continentale helling op zee, of de rand van een roterende bol – breekt daarom de reflectiesymmetrie van onderwatergolven. Zoals in figuur 2a aan de afstand tussen de blauwe lijntjes te zien is, zal bij reflectie de golflengte, de afstand tussen twee golfkammen, instantaan veranderen. Deze kan af- of toenemen, focuseren respectievelijk defocuseren. In een omsloten domein – noodzakelijk om een vloeistof te bevatten – blijkt focussing te domineren. Heen en weer kaatsende onderwatergolven concentreren zo uiteindelijk op golfaantrekkers [3]. Dit begrip ‘aantrekker’ komt uit de dynamische-systeemtheorie en slaat op de eenduidige eindtoestand waartoe een systeem zich vanuit een groot aantal begintoestanden ontwikkelt. Zodra de frequentie van de onderwa-

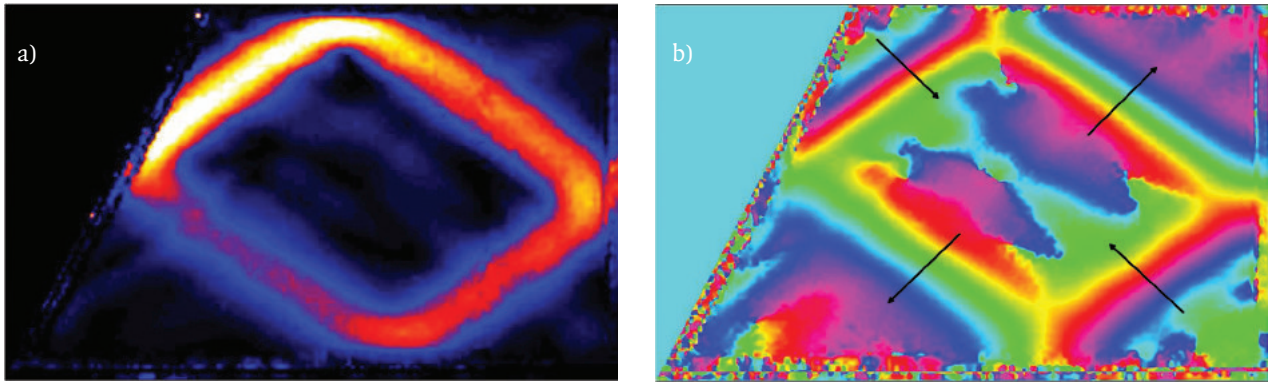
tergolf en de gelaagdheid en vorm van de zee bekend zijn, is, onafhankelijk van de positie van de bron, precies te voorspellen waar deze golven uiteindelijk heen zullen gaan!

Het concept ‘focussing’ stijgt hiermee uit boven hetgeen een parallelle lichtbundel bij inval op een lens ondervindt. Waar lichtgolven na passage van het brandpunt divergeren, zullen onderwatergolven irreversibel worden ingevangen op een golfaantrekker. Hierbij zij opgemerkt dat lichtgolven van verschillende frequentie allen *hetzelfde* brandpunt passeren, terwijl onderwatergolven van verschillende frequentie een andere golfhoek en daarmee andere golfaantrekker bereiken.

Energiebehoud impliceert dat een onderwatergolf na focuserende re-



Figuur 2 a) Deel van één karakteristiek web (blauw) leidend tot lokalisatie op een golfaantrekker (rood) en b) stroomfunctiepatroon van vrije onderwatergolf in bassin waarin reflectiesymmetrie gebroken is. Blauw en geel geven positieve en negatieve waarden weer. De stroomrichting is parallel aan (iso)stroomlijnen. De stroomsterkte is omgekeerd evenredig met de afstand tussen stroomlijnen. c) Als b) voor symmetrisch bekken, met twee afzonderlijke periodieke webben (blauw) [3].



Figuur 3 Laboratoriumwaarneming van de harmonische verstoring van de verticale dichtheidsgradiënt (onderwatergolf) in een horizontaal oscillerende tank met een hellende zijwand. a) Amplitude (dimensieloos), b) fase (kleur). De pijltjes geven de voortplantingsrichting weer [4].

flectie intensiveert. Zo kan in ideale, wrijvingsloze vloeistoffen ruis van zekere frequentie rond de bijbehorende golfaantrekker oneindig versterkt worden. Viscositeit leidt uiteraard tot verzadiging, net als niet-lineariteit (golfbreking), maar evengoed zijn golfaantrekkers de hotspots waar ‘het’ gebeurt: menging van watermassa’s, transport van opgeloste stoffen en verandering van de oorspronkelijke gelaagdheid.

Zelfgelijkvormigheid

De ruimtelijke structuur van tweedimensionale onderwatergolven wordt gevonden door golfstralen, karakteristieken, $x \pm z = \text{constant}$, te volgen. Hiermee kan de vergelijking voor het stroomfunctieveld exact worden opgelost: in symmetrische vloeistofbassins analytisch, door scheiding van variabelen; voor willekeurige bassin-

vorm geometrisch, door scheiding van operatoren (zie kader Stroomfunctiepatronen en figuur 2). De geometrische methode gebruikt dat door ieder punt precies twee karakteristieken lopen. Iedere karakteristiek vormt deel van een via weerkaatsing verbonden uniek web. Ieder web kent een invariant: de partiële druk. De storingsdruk en stroomfunctie in zo’n punt worden bepaald door de som respectievelijk het verschil van deze invarianten.

Hellende wanden leiden tot breking van de reflectiesymmetrie en voor bijna alle bassins bijna altijd tot golfaantrekkers; ook in driedimensionale bassins en ook voor niet-noodzakelijk parallele, gelijktijdige aanwezigheid van gelaagdheid in dichtheid en impulsmoment, zoals in de geo- en astrofysische context. Opmerkelijk is dat ondanks lineariteit van het probleem, de golfoplossingen eigen-

schappen vertonen die gewoonlijk alleen voorkomen in niet-lineaire dynamische systemen, namelijk zelfgelijkvormigheid in de fysieke, spectrale en parameter ruimtes: een deel van het patroon is gelijkvormig aan het gehele patroon [3].

Laboratorium- en veldwaarnemingen

In vloeistoffen die gelaagd zijn in dichtheid en/of impulsmoment kunnen golfaantrekkers experimenteel worden waargenomen. Een gelaagdheid in dichtheid creëert men bijvoorbeeld door bij het vullen van een tank het zoutgehalte als functie van de diepte te variëren. Aangezien de stroomfunctie (figuur 2) zelf niet meetbaar is, worden dichtheidsverstoringen (evenredig met de verticale snelheid, ψ_x) optisch gemeten. Deze techniek gebruikt dat licht een pad volgt dat een functie is van de dichtheid van het tussengelegen medium. Door de vloeistoftank horizontaal te oscilleren ontstaan onderwatergolven, verstoringen van het dichtheidsveld die zich manifesteren als schijnbare beweging van een op de achtergrond aangebracht stippelpatroon. Hun amplitude en fase tonen de lokalisatie van onderwatergolven op de bij deze oscillatiefrequentie horende rechthoekige golfaantrekker (figuur 3). Langs de aantrekker neemt de amplitude als gevolg van wrijving kloksgewijs af, in de richting waarin bij reflectie aan de voorover hellende linkerwand focussing plaatsvindt. Het faseveld laat het transversale karakter van onderwatergolven zien: fase beweegt (zie pijltjes in figuur 3b) loodrecht op de energievoortplantingsrichting.

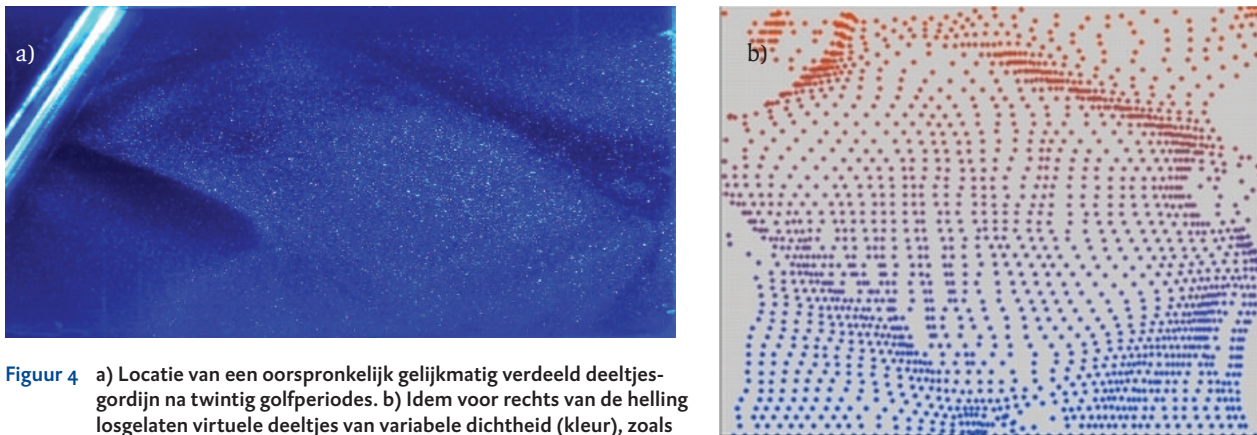
Lokalisatie van energie impliceert

Stroomfunctiepatronen

In tweedimensionale, uniform gelaagde media wordt het ruimtelijk patroon van monochromatische onderwatergolven beschreven door de (ruimtelijke) golfvergelijking:

$$\psi_{xx} - \psi_{zz} = (\partial_x - \partial_z)(\partial_x + \partial_z)\psi = 0,$$

in termen van stroomfunctie $\psi(x,z)$ met geschaalde horizontale (x) en verticale (z) coördinaten, en met subscripts als partiële afgeleiden. Hier is de verticale coördinaat, loodrecht op de lagen, zodanig gestrekt dat de hoek waaronder onderwatergolven lopen altijd 45 graden is, waardoor alle resonerende medium- en golfeigenschappen in één samengestelde parameter bevat zijn: de verhouding van bodemhelling en golfhelling. Observerbare stroomsnelheids- en dichtheidsverstoringen volgen uit de gradiënt van ψ . In gesloten bassins worden vrije golfoplossingen gevonden door te eisen dat de rand een stroomlijn ($\psi = 0$) is, en door op precies te bepalen delen van de rand ook de normaalafgeleide van de stroomfunctie willekeurig voor te schrijven. Forcering wordt ingebracht door op deel van die rand $\psi \neq 0$ te kiezen.

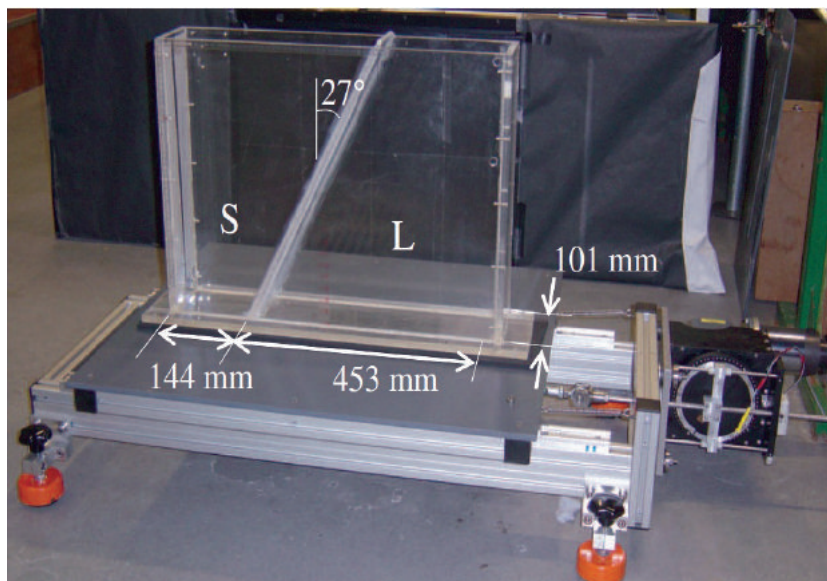


Figuur 4 a) Locatie van een oorspronkelijk gelijkmatig verdeeld deeltjes-gordijn na twintig golfperiodes. b) Idem voor rechts van de helling losgelaten virtuele deeltjes van variabele dichtheid (kleur), zoals verplaatst door het waargenomen stationaire snelheidsveld.

kleinschaligheid. Traditioneel zijn oceanografische waarnemingen echter gericht op het oplossen van groot-schalige patronen. Dit betekent dat de afstand tussen twee meetpunten typisch van de orde van kilometers in horizontale en (tientallen) meters in verticale richting is, terwijl slechts een fractie van de totale waterdiepte bemonsterd wordt. Mogelijk heeft gebrek aan ruimtelijk oplossend vermogen de ontdekking van golfaantrekkers in zee en meren in de weg gestaan. De ontwikkeling van nieuwe instrumenten die driedimensionaal kunnen observeren is daarom gewenst [5].

Indicaties uit de natuur

In gelaagde zeeën zouden golfaantrekkers dus plankton naar de diepzee kunnen transporteren en zo koralen en sponzen kunnen voeden [1]. Hoewel transport van materiaal vanaf oppervlak naar bodem, met een component loodrecht op dichtheidsvlakken, niet-triviaal is tonen laboratoriumproeven aan dat golfaantrekkers in ieder geval in de ‘gratis’ richting, langs dichtheidsvlakken, deeltjes ‘aantrekken’ (figuur 4). Een daaropvolgend neerwaarts transport langs de golfaantrekker is mogelijk het gevolg van menging door instabiliteit van de geassocieerde intense scheringsstroom. Golfaantrekkers zouden ook een verklaring kunnen bieden voor de aanwezigheid van twee typen jonge sterren: sommige mét, andere zonder lithium. Curieus is dat lithium afwezig lijkt in sterren die vergezeld worden door een planeet [6]. De aanwezigheid van een planeet impliceert getijdenwerking. In een roterende, wellicht ook dichtheidsgelaagde ster kan dit, net als in de mariene context, tot versneld



Figuur 5 De gebruikte opstelling, met daarin de dimensies en S en L staan voor klein en groot bassin. De bakken worden met water gevuld met van beneden naar boven gradueel afnemend zoutgehalte. De motor om de bak te oscilleren is rechts te zien.

transport langs een golfaantrekker en daarmee tot verwijdering van lithium hebben geleid.

We verwachten dat golfaantrekkers ook in andere anisotrope media voorkomen zodra de domeinvorm de reflectiesymmetrie verbreekt, bijvoorbeeld in gemagnetiseerde plasma's of in metamaterialen, waarin licht op nanoschaal een vaste hoek met de anisotropierichting maakt [7]. Welke verschijnselen hierbij horen blijft voorsnogen een raadsel.

Referenties

- 1 F. Mienis, H.C. De Stigter, M. White, G. Duineveld, H. De Haas, T.C.E. van Weering Hydrodynamic controls on cold-water coral growth and carbonate-mound development at the SW and SE Rockall Trough Margin, NE Atlantic Ocean. *Deep Sea Research I*, **54** (2007) 1655-1674
- 2 B. Vermeersen, *Onderwatergolven in ijsmanen*, NTvN **78-11** (2012).

- 3 L.R.M. Maas, F.P.A. Lam, *Geometric focusing of internal waves*, *J. Fluid Mech.* **300** (1995) 1-41.
- 4 J. Hazewinkel, C. Tsimritri, L.R.M. Maas, S. B. Dalziel, *Observations on the robustness of internal wave attractors to perturbations*, *Physics of Fluids* **22** (2010) 107102.
- 5 H. van Haren, *Energieverlies door brekende interne golven in zee en oceaan*, NTvN **78-10** (2012) 398-402.
- 6 G. Israelian, E.D. Mena, N.C. Santos, S.G. Sousa, M. Mayor, S. Udry, C.D. Cerdana, R. Rebolo, S. Randich, *Enhanced lithium depletion in Sun-like stars with orbiting planets*, *Nature* **462** (2009) 189-191.
- 7 X. Yang, J. Yao, J. Rho, X. Yin, X. Zhang, *Experimental realization of three-dimensional indefinite cavities at the nanoscale with anomalous scaling laws*, *Nature Photonics* (2012) doi:10.1038/nphoton.2012.124.